

# BERECHNUNG DER WÄRMEÜBERTRAGUNG IN REGENERATOREN BEI TEMPERATURABHÄNGIGEN STOFFWERTEN UND WÄRMEÜBERGANGSZAHLN

H. HAUSEN

Lehrstuhl und Institut für Thermodynamik und Verfahrenstechnik der Technischen Hochschule, Hannover

(Received 21 August 1963)

**Zusammenfassung**—Das Streben, in Wärmeaustauschern immer höhere Temperaturen zu erreichen, macht es notwendig, bei einer genauen Berechnung der Wärmeübertragung nicht nur den Einfluss der Strahlung, sondern auch die Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte zu berücksichtigen. Denn diese Stoffwerte gehen in die Wärmeübergangsgleichungen und in die Wärmebilanz ein. Ein schon früher veröffentlichtes Stufenverfahren zur Berechnung von Regeneratoren, das ursprünglich nur bei konstanten Stoffwerten anwendbar war, wird so erweitert, dass die genannten Abhängigkeiten von der Temperatur mit in die Rechnung eingeführt werden können. Ein Beispiel zeigt die Ergebnisse einer hiernach durchgeführten Berechnung.

	BEZEICHNUNGEN		
$t$ ,	mittlere Temperatur der Speichermasse in einem Regeneratorquerschnitt;	$\alpha$ ,	Wärmeübergangszahl in der Warmperiode;
$\vartheta$ ,	Temperatur des Gases;	$\alpha'$ ,	Wärmeübergangszahl in der Kaltperiode;
$t^*$ ,	Mittelwert von $t$ im Intervall $\Delta f$ ;	$\bar{\alpha}, \bar{\alpha}'$ ,	auf die mittlere Temperatur $t$ der Speichermasse bezogene Wärmeübergangszahlen in Warm- bzw. Kaltperiode;
$\vartheta^*$ ,	Mittelwert von $\vartheta$ im Intervall $\Delta f$ ;	$k$ ,	Wärmedurchgangszahl;
$\vartheta_1$ ,	Temperatur des eintretenden Gases;	$k_M$ ,	mittlere wahre Wärmedurchgangszahl;
$\vartheta_2$ ,	Temperatur des austretenden Gases;	$k_o$ ,	Wärmedurchgangszahl nach der nullten Eigenfunktion;
$\bar{\vartheta}, \bar{\vartheta}'$ ,	zeitliche Mittelwerte der Gastemperatur in einem Regeneratorquerschnitt in Warm- bzw. Kaltperiode;	$(k_o)_M$ ,	Mittelwert der Wärmedurchgangszahl nach der nullten Eigenfunktion;
$\Delta \vartheta_M$ ,	Gesamtmittelwert der Temperaturdifferenz zwischen wärmerem und kälterem Gas;	$\lambda_B$ ,	Wärmeleitfähigkeit der Speichermasse;
$t_1, t_2, t_3, t_4, \vartheta_1, \vartheta_2$ ,	bedeuten auch die Temperaturen in einer Stufe nach Bild 2, 3 und 4;	$\alpha$ ,	Temperaturleitfähigkeit des Baustoffes der Speichermasse;
$\tau$ ,	Zeit;	$\delta$ ,	Dicke eines Elementes der Speichermasse;
$T$ ,	Dauer der Warmperiode;	$f$ ,	Oberfläche der Speichermasse zwischen der Stelle
$T'$ ,	Dauer der Kaltperiode;		

	des Gaseintritts und dem betrachteten Regeneratorquerschnitt;
$F$ ,	Gesamte wärmeübertragende Oberfläche der Speichermasse;
$C$ ,	Wärmekapazität der in der Zeiteinheit durch den Regenerator strömenden Gasmenge;
$C_s$ ,	Wärmekapazität der Speichermasse;
$Q_{Per}$ ,	die in einem Regenerator in einer Periode übertragene Wärmemenge;
$\phi$ ,	Hilfsfunktion nach Bild 1;
$A$ ,	reduzierte Regeneratorlänge;
$II$ ,	reduzierte Periodendauer.

Dass die Technik an die Wirksamkeit der Wärmeaustauscher immer höhere Anforderungen stellt, kommt u. a. dadurch zum Ausdruck, dass man in den Winderhitzern der Hochöfen die Luft, Wind genannt, vor Eintritt in den Hochofen weit höher vorwärmen will als es früher üblich war. Auch erstrebt man eine gleichbleibende Eintrittstemperatur in den Hochofen, was man trotz der schwankenden Austrittstemperatur aus den Winderhitzern dadurch erreichen kann, dass man der erhitzten Luft eine kleine zeitlich abnehmende Menge nicht erwärmter Luft zumischt.

Bei diesen hohen Temperaturen spielt die Wärmeübertragung durch Strahlung, insbesondere in der Gasperiode, eine erhebliche Rolle. Die Wärmeübergangszahlen hängen aber auch schon deshalb merklich von der Temperatur ab, weil die Stoffwerte wie Wärmeleitfähigkeit, Viskosität, Dichte und spezifische Wärme sich in dem weiten Temperaturbereich nicht beträchtlich verändern.

Die Winderhitzer für sehr hohe Temperaturen wirken stets als Regeneratoren, die die Wärme vorübergehend speichern und regelmässig umgeschaltet werden. Der Verfasser hat an früherer Stelle† eine ausführliche Theorie der Wärme-

übertragung in Regeneratoren veröffentlicht. Diese Theorie wurde aber zunächst unter der Voraussetzung entwickelt, dass alle Stoffwerte wie auch die Wärmeübergangszahlen als konstant betrachtet werden können. Es soll daher im folgenden gezeigt werden, wie man auf Grund ähnlicher Überlegungen den Temperaturverlauf und die Wärmeübertragung in Regeneratoren auch bei temperaturabhängigen Stoffwerten berechnen kann. Es wird zwar kaum möglich sein, für derart allgemeine Fälle eine analytische Lösung der zu Grunde liegenden Differentialgleichungen zu finden. Doch lässt sich ein schon früher entwickeltes Näherungsverfahren,‡ das auf der Differenzenrechnung beruht, ohne Schwierigkeit so verallgemeinern, dass auch die genannten Temperaturabhängigkeiten berücksichtigt werden können.

Hingegen ist es nicht nötig, in Rechnung zu setzen, dass infolge der nachträglichen Zumischung kalter Luft die in der Zeiteinheit durch den Regenerator strömende Luftmenge im Laufe der Windperiode um etwa 20% zunimmt. Denn mit Änderung der Menge verändern sich fast in gleichem Masse die Wärmeübergangszahlen und die zu übertragende Wärmemenge. Man begeht daher, wenn man mit einer konstanten mittleren Menge rechnet, einen nur sehr kleinen Fehler, der wesentlich geringer ist als die Unsicherheit, mit der die Wärmeübergangszahlen bekannt sind.

#### STUFENVERFAHREN

Die Wärmeübergangszahlen seien als Funktionen der Temperatur bestimmt, wobei neben dem Wärmeübergang durch Wärmeleitung und Konvektion auch die Wärmeübertragung durch Strahlung in Form einer Wärmeübergangszahl zum Ausdruck gebracht sei. An sich hängen die Wärmeübergangszahlen sowohl von der Gas-temperatur als auch von der Temperatur der Speichermasse ab. Da aber die Temperaturunterschiede zwischen Gas und Speichermasse sich in einem gegebenen Fall, für den die Rechnung durchgeführt werden soll, von vornherein abschätzen lassen, wird es stets gelingen, die Wärmeübergangszahlen mit genügender Genauigkeit als alleinige Funktion der Temperatur der Speichermasse darzustellen. Dies

† H. Hausen, Wärmeübertragung im Gegenstrom, Gleichstrom und Kreuzstrom. Berlin, Göttingen und Heidelberg, Springer-Verlag 1950, S. 262 ff.

‡ S. 382 des in Fussnote (†) genannten Buches.

soll im folgenden vorausgesetzt werden, weil sich hierdurch die Rechnung erheblich vereinfacht.

Die Wärmeübergangszahl in der Warmperiode (Gasperiode eines Winderhitzers) werde mit  $\alpha$ , die in der Kaltperiode (Windperiode) mit  $\alpha'$  bezeichnet. Diese auf den Temperaturunterschied zwischen Gas und Oberfläche der Speichermasse bezogenen wahren Wärmeübergangszahlen sind aber für die Rechnung unbequem, weil die Änderungen der Temperaturen im Innern der Speichermasse hinter denen der Oberflächentemperaturen zeitlich nachhinken. Deshalb sollen zur weiteren Vereinfachung Wärmeübergangszahlen  $\bar{\alpha}$  und  $\bar{\alpha}'$  eingeführt werden, die auf die mittlere Temperatur  $t$  der Speichermasse in einem Regeneratorquerschnitt bezogen sind.  $\bar{\alpha}$  erhält man nach der Gleichung†

$$\frac{1}{\bar{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\lambda_B} \phi, \tag{1}$$

in der  $\delta$  die Dicke eines Elementes der Speichermasse,  $\lambda_B$  ihre Wärmeleitzahl und  $\phi$  eine Hilfsfunktion bedeutet. Eine entsprechende Gleichung gilt für  $\bar{\alpha}'$ . Ist  $a$  die Temperaturleitzahl des Baustoffes der Speichermasse und  $T$  und  $T'$  die Dauer der Warm- und Kaltperiode, dann lässt sich  $\phi$  nach Berechnung von

$$\frac{\delta^2}{2a} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right)$$

aus Bild 1‡ ablesen. Dass die Benutzung von Gl. (1) in praktischen Fällen nur zu vernachlässigbar kleinen Ungenauigkeiten führt, geht

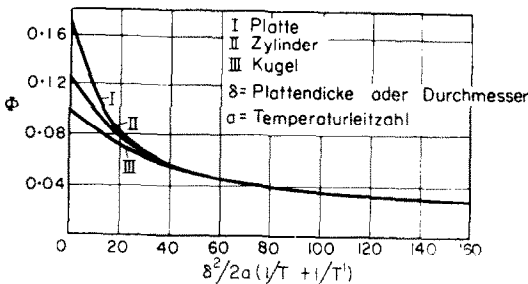


BILD 1. Hilfsfunktion  $\phi$  zur Berechnung der Wärmedurchgangszahl.

† Gl. (514) S. 330 des genannten Buches.

‡ Abb. 139 S. 283 des genannten Buches.

aus den Erörterungen von S. 331 des oben genannten Buches hervor. Sie bringt aber den grossen Vorteil mit sich, dass man die örtlichen Temperaturunterschiede in einem Querschnitt der Speichermasse nicht zu berücksichtigen braucht.

Unter dieser Voraussetzung erhält man die Differentialgleichungen der Wärmeübertragung in einem Regenerator wie folgt. Zur deutlichen Unterscheidung von der mittleren Temperatur  $t$  der Speichermasse werde die Temperatur des Gases mit  $\vartheta$  bezeichnet. Ferner sei  $C$  die Wärmekapazität der in der Zeiteinheit durch den Regenerator strömenden Gasmenge,  $C_s$  die Wärmekapazität der Speichermasse,  $\tau$  die Zeit. Wenn das Gas ein kurzes Stück der Speichermasse mit der Oberfläche  $df$  und der Wärmekapazität  $dC_s$  bestreicht, kühle es sich um  $d\vartheta$  ab. Aus der Überlegung, dass die hierdurch vom Gas in der Zeit  $d\tau$  abgegebene Wärmemenge durch die Oberfläche  $df$  übertragen wird und zu einer Temperaturerhöhung  $dt$  der Speichermasse führt, folgt:

$$- C d\tau d\vartheta = \bar{\alpha} df (\vartheta - t) d\tau = dC_s \cdot dt.$$

Hieraus ergeben sich die Differentialgleichungen

$$\left( \frac{\partial \vartheta}{\partial f} \right)_{\tau} = \frac{\bar{\alpha}}{C} (t - \vartheta), \tag{2}$$

$$\left( \frac{\partial t}{\partial \tau} \right)_f = \bar{\alpha} \frac{df}{dC_s} (\vartheta - t). \tag{3}$$

Die zwischen der Stelle des Gaseintritts und dem betrachteten Regeneratorquerschnitt befindliche Oberfläche  $f$  der Speichermasse werde als Längskordinate betrachtet.

Unter der Annahme, dass  $\bar{\alpha}/c$  und  $\bar{\alpha} df/dC_s$  konstant sind, wurden aus den Differentialgleichungen (2) und (3) zeichnerische Stufenverfahren zur Berechnung von  $t$  abgeleitet, die auf S. 382 des erwähnten Buches beschrieben sind. Nachstehend soll gezeigt werden, wie man eines dieser Verfahren abwandeln kann, um die Temperaturabhängigkeit von  $\bar{\alpha}/c$  und  $\bar{\alpha} df/dC_s$  zu berücksichtigen. Auch soll in Rücksicht auf die elektronische Berechnung das Verfahren so entwickelt werden, dass es nicht nur als graphische Methode, sondern auch zur numerischen Berechnung geeignet ist.

$\bar{\alpha}$ ,  $C$  und  $C_s$  ändern sich nur verhältnismässig

langsam mit der Temperatur. Vor allem aber wird die Veränderlichkeit von  $\bar{a}$  in den Ausdrücken  $\bar{a}/C$  und  $\bar{a} df/dC_s$  dadurch reduziert, dass  $\bar{a}$  durch die ebenfalls mit der Temperatur zunehmenden Grössen  $C$  oder  $C_s$  dividiert wird. Deshalb kann man  $\bar{a}/c$  und  $\bar{a} df/dC_s$  innerhalb jeder einzelnen Stufe ohne merklichen Fehler als konstant betrachten.

Unter dieser Voraussetzung lässt sich  $\vartheta$  aus den Gln. (2) und (3) eliminieren, indem man Gl. (3) partiell nach  $f$  differenziert und berücksichtigt, dass nach Gl. (2) und (3)

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial f}\right)_\tau = -\frac{1}{C} \frac{dC_s}{df} \left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)_f$$

ist. Es ergibt sich so für  $t$  allein die für eine einzelne Stufe geltende Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 t}{\partial f \partial \tau} + \bar{a} \frac{df}{dC_s} \frac{\partial t}{\partial f} + \frac{\bar{a}}{C} \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0. \quad (4)$$

Diese Differentialgleichung soll nach einem Differenzenverfahren gelöst werden.

In Bild 2 sei die Temperatur zur Zeit  $\tau$  vollständig oder wenigstens bis zur Stelle  $f_{n+1} = f_n + \Delta f$ , zur Zeit  $\tau + \Delta \tau$  bis zur Stelle  $f_n$  vorgegeben, so dass die Temperaturen  $t_1, t_2$  und  $t_3$  bekannt sind. Die Temperatur  $t_4$  an der Stelle  $f_{n+1}$  zur Zeit  $\tau + \Delta \tau$  sei gesucht.

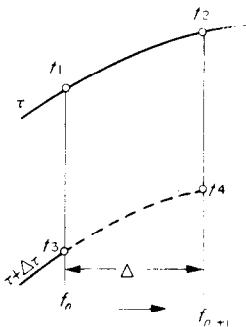


BILD 2. Stufenverfahren zur Berechnung der Steintemperatur.

Zur Bestimmung von  $t_4$  wollen wir in der Differentialgleichung (4) die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzen und darauf achten, dass diese gute Mittelwerte in der betrachteten Stufe darstellen. Wir bilden daher näherungsweise

$$\frac{\partial t}{\partial f} = \frac{1}{2} \left( \frac{t_2 - t_1}{\Delta f} + \frac{t_4 - t_3}{\Delta f} \right),$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \left( \frac{t_3 - t_1}{\Delta \tau} + \frac{t_4 - t_2}{\Delta \tau} \right)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial f \partial \tau} = \frac{1}{\Delta \tau} \left( \frac{t_4 - t_3}{\Delta f} - \frac{t_2 - t_1}{\Delta f} \right).$$

Setzt man diese Ausdrücke in Gl. (4) ein, so erhält man unter Auflösung nach  $t_4$ :

$$t_4 = t_1 + \frac{(t_2 + t_3 - 2t_1) + \left( \frac{\bar{a}}{2C} \Delta f - \frac{\bar{a}}{2} \frac{df}{dC_s} \Delta \tau \right) (t_2 - t_3)}{1 + \frac{\bar{a}}{2C} \Delta f + \frac{\bar{a}}{2} \frac{df}{dC_s} \Delta \tau}. \quad (5)$$

Die Gleichung ist für numerische Berechnungen besonders geeignet, weil sie über die Wahl der Schritte  $\Delta f$  und  $\Delta \tau$  nichts vorschreibt. Es ist hierbei meist vorteilhaft, die Werte von  $\Delta f$  und  $\Delta \tau$  in allen Stufen gleich gross anzunehmen. Für  $\bar{a}/C$  und  $\bar{a} df/dC_s$  wählt man für jede Stufe zweckmässig die Werte, die sich für  $t = t_1$  aus der bekannten Temperaturabhängigkeit dieser Grössen ergeben. Da meist  $t_1$  und  $t_4$  nicht sehr verschieden sind, stellen die so festgesetzten Werte gute Mittelwerte innerhalb einer Stufe dar.

Für die graphische Berechnung gelangt man zu einem einfachen Verfahren, wenn man

$$\Delta f = C \frac{df}{dC_s} \Delta \tau \quad (6)$$

setzt. Hiermit geht Gl. (5) über in

$$t_4 = t_1 + \frac{t_2 + t_3 - 2t_1}{1 + \frac{\bar{a}}{C} \Delta f}. \quad (7)$$

Diese Gleichung wird durch die in Bild 3 dargestellte Konstruktion erfüllt. Von der Mitte der geraden Linie, die die Punkte  $t_3$  und  $t_2$  verbindet, zieht man eine Waagerechte bis zum Punkt 0. Dieser Punkt ist dadurch bestimmt, dass er von der Senkrechten an der Abszisse  $f_{n+1}$  den Abstand  $\Delta f/2 [(\bar{a}/C) \Delta f - 1]$  hat. Schliesslich schneidet die Gerade, die den Punkt 0

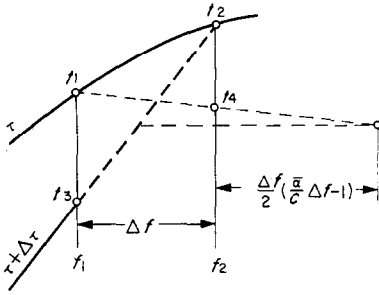


BILD 3. Berechnung der Steintemperatur  $t_4$ .

mit  $t_1$  verbindet, auf der Senkrechten  $f_{n+1}$  die gesuchte Temperatur  $t_4$  aus. Diese Konstruktion entspricht dem in Abb. 180, S. 382, des genannten Buches dargestellten Verfahren, jedoch mit dem Unterschied, dass die Konstruktion in Bild 3 nicht an die Verwendung dimensionsloser Koordinaten gebunden ist. Bei der Anwendung wird es im allgemeinen zweckmässig sein,  $\Delta\tau$  unverändert zu lassen.  $\Delta f$  ändert sich dann nach Gl. (6) von Stufe zu Stufe in geringem Masse. Daß die in Bild 3 dargestellte Konstruktion Gl. (7) erfüllt, lässt sich ebenso beweisen, wie es in dem genannten Buch für die dortige Abb. 180 gezeigt ist.

**ZEITLICHER VERLAUF DER TEMPERATUR DER SPEICHERMASSE AN DER STELLE DES GASEINTRITTS**

Um das beschriebene Stufenverfahren anwenden zu können, muss man zuvor für die betrachtete Periode den zeitlichen Verlauf der Temperatur der Speichermasse an der Stelle des Gaseintritts ermitteln. Die Temperatur  $\vartheta = \vartheta_1$  des eintretenden Gases ist als vorgegeben zu betrachten. Der Verlauf der Temperatur der Speichermasse kann daher durch Integration von Gl. (3) berechnet werden. Ist wie in den meisten Fällen  $\vartheta_1$  konstant und kann auch  $\bar{a} df/dC_s$  als konstant betrachtet werden, dann erhält man

$$t = t_1 = \vartheta_1 + (t_a - \vartheta_1) \exp - (\bar{a} df/dC_s) \tau, \quad (8)$$

worin  $t_a$  den Wert von  $t = t_1$  zu Beginn der Periode, d.h. zur Zeit  $\tau = 0$  bedeutet. Ändert sich hingegen  $\bar{a} df/dC_s$  mit der Temperatur  $t$  und deshalb auch mit der Zeit, dann wird man diese Grösse wenigstens für ein Zeitintervall  $\Delta\tau$  als

konstant betrachten und für jedes Intervall eine gesonderte Gleichung der Gestalt (8) verwenden können. Aber auch jedes andere Näherungsverfahren zur Auflösung von Gl. (3) nach  $t$  ist geeignet.

**BERECHNUNG DER GASTEMPERATUR**

Hat man in der vorgegebenen Weise für verschiedene Zeiten den Verlauf der Temperatur  $t$  der Speichermasse berechnet, dann erhält man den zugeordneten Verlauf der Gastemperatur mit Hilfe von Gl. (2). Im Sinne des Differenzenverfahrens kann man diese Gleichung näherungsweise wiedergeben durch

$$\frac{\Delta\vartheta}{\Delta f} = \frac{\bar{a}}{C} (t^* - \vartheta^*), \quad (9)$$

wobei  $t^*$  und  $\vartheta^*$  die Mittelwerte von  $t$  und  $\vartheta$  im Intervall  $\Delta f$  bedeuten. Gl. (9), die für eine bestimmte Zeit gilt, wird durch das in Bild 4 dargestellte Verfahren erfüllt. Bei bekannten Temperaturen  $t_1, t_2$  und  $\vartheta_1$  sei die Temperatur  $\vartheta_2$  an der Stelle  $f_{n+1}$  gesucht. Vom Punkt der Temperatur  $t^*$  ziehe man eine waagerechte Linie von der Länge  $C/\bar{a}$  nach rechts. Die Gerade, welche den Endpunkt der Horizontalen mit dem Punkt  $\vartheta_1$  verbindet, schneidet auf der Senkrechten  $f_{n+1}$  die gesuchte Gastemperatur  $\vartheta_2$  aus.

$\vartheta_2$  kann aber wie folgt auch rein numerisch berechnet werden. Setzt man nämlich entsprechend Bild 4

$$t^* = \frac{t_1 + t_2}{2}; \quad \vartheta^* = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \quad \text{und} \quad \Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1,$$

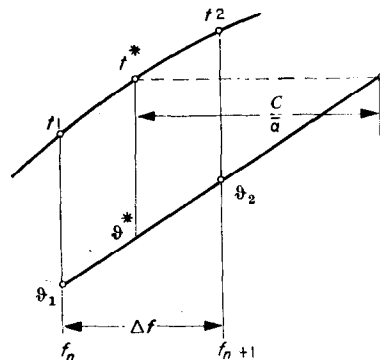


BILD 4. Berechnung der Gastemperatur  $\vartheta_2$ .

in Gl. (9) ein, dann folgt nach Umformung

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 + \frac{t_1 + t_2 - 2\vartheta_1}{1 + \frac{2C}{\bar{a} \Delta f}} \quad (10)$$

Diese Gleichung eignet sich gut für die elektronische Berechnung.

**ZAHLENBEISPIEL FÜR DIE BESCHRIEBENEN STUFENVERFAHREN**

Die beschriebenen Stufenverfahren wurden an einem Zahlenbeispiel mit Hilfe elektronischer Berechnungen erprobt. Hierbei wurden folgende Annahmen gemacht. Ein heisses Gas mit einer Anfangstemperatur von 1150°C strömt zwei Stunden lang durch den Regenerator. Danach strömt ebenso lang Luft in der entgegengesetzten Richtung mit einer Anfangstemperatur von 20°C hindurch. Die Wärmekapazitäten der stündlich hindurchströmenden Mengen von Gas und Luft seien zur Vereinfachung als temperaturunabhängig und als gleich gross angesehen mit einem Betrag von  $C = C' = 15\,000$  kcal/h

grad. Das Gitterwerk bestehe aus Steinen von 0,05 m Dicke und 0,1 m Höhe mit einem waagerechten Abstand von 0,05 m. Das Verhältnis der Wärmekapazität der Steine zu ihrer Oberfläche sei ebenfalls konstant und betrage  $W_s/F = 10$  kcal/m<sup>2</sup> grad. Die gesamte Oberfläche des Gitters sei  $F = 9900$  m<sup>2</sup>.

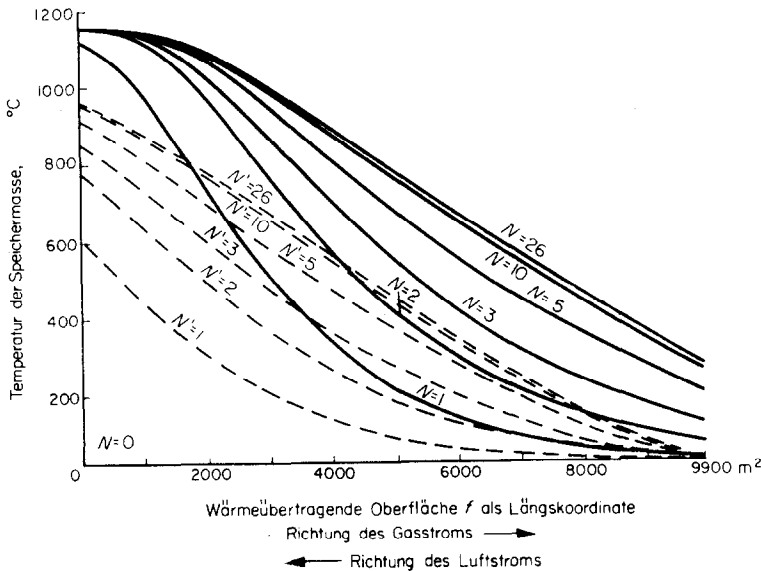
Wenn so zur Vereinfachung die Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte vernachlässigt wurde, so ist es andererseits wichtig, die starke Temperaturabhängigkeit der Wärmeübertragung durch Strahlung zu berücksichtigen. Deshalb wurde die Wärmeübergangszahl in der Gasperiode dargestellt durch die Beziehung

$$\alpha = 20 + 0,02 \left( \frac{T}{100} \right)^3 \text{ in kcal/m}^2 \text{ h grad,}$$

wobei der zweite Ausdruck den Einfluss der Strahlung berücksichtigt. In der Windperiode wurde hingegen der konstante Wert

$$\alpha' = 20 \text{ kcal/m}^2 \text{ h grad}$$

angenommen. Zur Berechnung von  $\bar{a}$  und  $\bar{a}'$



**BILD 5.** Erwärmung und Abkühlung der wärmespeichernden Masse eines Regenerators in 26 Perioden.

- Anfangstemperatur der Masse: 20°C.
- Eintrittstemperatur des Gases: 1150°C.
- Eintrittstemperatur der Luft: 20°C.
- $N$  oder  $N'$  kennzeichnet die Nummer der Vollperiode, bestehend aus Gas- und Windperiode.
- Ende einer Gasperiode.
- - - - Ende einer Windperiode.

nach Gl. (1) wurde  $\lambda_B = 1 \text{ kcal/m h grad}$  und  $\phi = 0,1665$  gesetzt, womit sich mit  $\delta = 0,05 \text{ m}$  der Ausdruck  $\delta/\lambda_B \phi$  zu  $0,00833$  errechnet. Die Grössen der Stufen wurden zu  $\Delta f = 300 \text{ m}^2$  und  $\Delta\tau = 0,2 \text{ h}$  gewählt.

Die Ergebnisse der Rechnung sind in den

Bildern 5, 6 und 7 dargestellt. Die mittlere Steintemperatur  $t$  ist abhängig von der als Längskoordinate benutzten Steinoberfläche  $f$  aufgetragen. In Bild 5 ist angenommen, dass zu Beginn der ersten Periode ( $N = 0$ ) die gesamte Steinmasse eine Temperatur von  $20^\circ\text{C}$  hat:

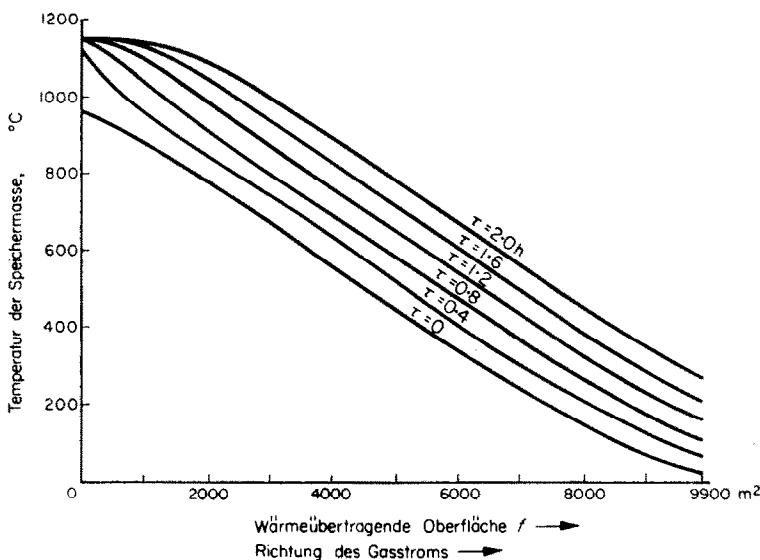


BILD 6. Beharrungszustand des Regenerators Gasperiode.  
 $\tau$  ist die Zeit in h.

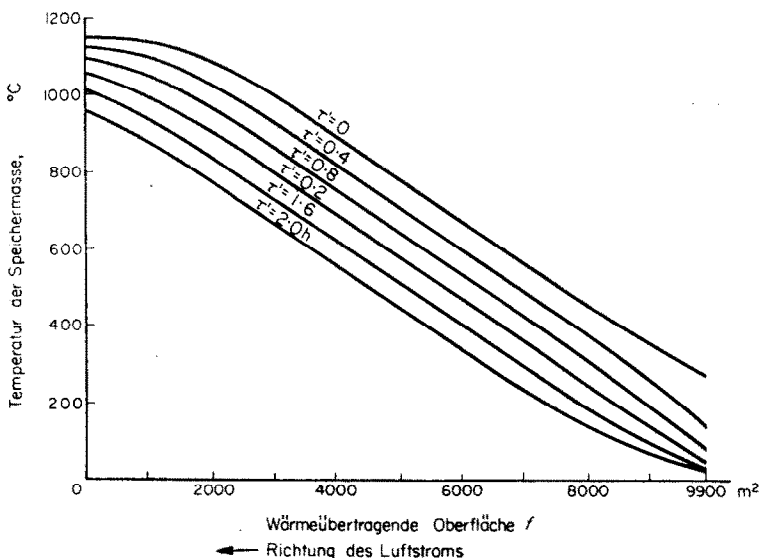


BILD 7. Beharrungszustand des Regenerators Windperiode.  
 $\tau$  Zeit in h.

$N = 1$  kennzeichnet den Temperaturverlauf am Ende der ersten Gasperiode (ausgezogene Linie),  $N' = 1$  am Ende der ersten Luftperiode (gestrichelte Linie) usw. Nach der 26. Periode ist angenähert der Beharrungszustand erreicht. Die Bilder 6 und 7 geben den Temperaturverlauf bei Beharrungszustand in der Gas- und Luftperiode zu den Zeiten  $\tau = 0; 0,4; 0,8; 1,2; 1,6$  und  $2 h$  nach Beginn der jeweiligen Periode wieder.

#### ABSCHÄTZUNG DES TEMPERATURVERLAUFS IN DER LÄNGS-RICHTUNG DES REGENERATORS

Bei Anwendung des zuerst erörterten Stufenverfahrens, das die Temperatur  $t$  der Speichermasse zu ermitteln gestattet, kann man von einer beliebigen anfänglichen Temperaturverteilung in der Längsrichtung des Regenerators ausgehen. Den Beharrungszustand erhält man dann dadurch, dass man, wie Bild 5 zeigt, eine grössere Zahl aufeinanderfolgender Warm- und Kaltperiodendurchrechnet, bis sich der Temperaturverlauf bei Beginn oder Ende einer Periode nicht mehr ändert. Es ist dann ein zeitlich streng periodischer Zustand erreicht.

Vielfach ist hierbei die Zahl der durchzurechnenden Perioden sehr gross. Rascher kommt man zum Ziel, wenn man von vornherein von einem Temperaturverlauf ausgeht, der dem Beharrungszustand nahe liegt. Es erscheint daher sinnvoll, den Temperaturverlauf im Beharrungszustand abzuschätzen.

Für eine solche Abschätzung soll zunächst ein Näherungswert der Wärmedurchgangszahl  $k$  ermittelt werden, die nach Rummel definiert ist durch die Gleichung

$$Q_{Per} = kF(T + T') \Delta \bar{\theta}_M. \quad (11)$$

Hierin ist  $Q_{Per}$  die in einem Regenerator in einer Periode übertragene Wärmemenge,  $F$  die wärmeübertragende Oberfläche eines Regenerators und  $\Delta \bar{\theta}_M = (\bar{\theta} - \bar{\theta}')_M$  der Gesamtmittelwert der Temperaturdifferenz zwischen wärmerem und kälterem Gas.  $\bar{\theta}$  und  $\bar{\theta}'$  sind die zeitlichen Mittelwerte in einem Regeneratorquerschnitt.

Die periodischen Temperaturänderungen im Beharrungszustand des Regenerators kann man als Temperaturschwingung auffassen, die sich

wie ein musikalischer Ton in die Grundschwingung und unendlich viele höhere Schwingungen zerlegen lässt. Mathematisch wird die Grundschwingung durch die nullte Eigenfunktion, die höheren Schwingungen durch die höheren Eigenfunktionen wiedergegeben†. Als Näherungswert für  $k$  soll nun die Wärmedurchgangszahl  $k_o$  dienen, die sich allein aus der nullten Eigenfunktion berechnen lässt und nach Gl. (516) S. 332 des oben genannten Buches bestimmt ist durch

$$\frac{1}{k_o} = (T + T') \left( \frac{1}{\bar{a}T} + \frac{1}{\bar{a}'T'} \right), \quad (12)$$

worin wieder  $\bar{a}$  und  $\bar{a}'$  die nach Gl. (1) auf die mittlere Temperatur der Speichermasse bezogenen Wärmeübergangszahlen bedeuten. Ebenso wie  $\bar{a}$  und  $\bar{a}'$  hängt nach Gl. (12) auch  $k_o$  von der Temperatur ab.

Ist ferner  $f_o$  die wärmeübertragende Fläche, die bis zum betrachteten Regeneratorquerschnitt bei alleiniger Gültigkeit der nullten Eigenfunktion erforderlich wäre, dann gilt für ein Flächenelement  $df_o$  entsprechend Gl. (11)

$$dQ_{Per} = k_o df_o (T + T') (\bar{\theta} - \bar{\theta}'), \quad (13)$$

worin  $\bar{\theta}$  und  $\bar{\theta}'$  die zeitlichen Mittelwerte der Gastemperaturen in Warm- und Kaltperiode bedeuten. Ferner ist

$$dQ_{Per} = -CT d\theta = C'T' d\theta'.$$

Da jedoch  $k_o$  ebenso wie  $\bar{a}$  und  $\bar{a}'$  als Funktion der mittleren Steintemperatur  $t$  betrachtet werden soll und  $dt$  einen Wert zwischen  $d\theta$  und  $d\theta'$  hat, ersetzen wir die letzte Gleichung angenähert durch

$$dQ_{Per} = C_{Per} dt \quad (14)$$

mit  $C_{Per} = \frac{1}{2} (CT + C'T')$ .

Aus (13) und (14) folgt

$$df_o = \frac{C_{Per} dt}{(T + T') k_o (\bar{\theta} - \bar{\theta}')}. \quad (16)$$

Bei bereits durchgeführten Rechnungen wurde gefunden, dass in manchen Fällen  $1/k_o$  als lineare Funktion von  $t$  betrachtet werden kann. Offensichtlich kann man daher auch den

† Vg. §56 des oben zitierten Buches.



Ausdruck  $C_{Per}/k_o(\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}')$  durch eine einfache Funktion ausdrücken, z.B. durch eine Funktion der Art

$$\frac{C_{Per}}{k_o(\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}')} = a + 2\beta t + 3t^2. \quad (17)$$

Durch Einsetzen in Gl. (16) und Integration von der Temperatur  $t_2$  am kalten Ende des Regenerators bis zur Temperatur  $t$  im betrachteten Querschnitt erhält man

$$f_o = \frac{1}{T + T'} [at + \beta t^2 + t^3 - (at_2 + \beta t_2^2 + t_2^3)] \quad (18)$$

und entsprechend bei Integration bis zur Temperatur  $t_1$  am warmen Regeneratorende für die gesamte bei der nullten Eigenfunktion benötigte Fläche  $F_o$

$$F_o = \frac{1}{T + T'} [at_1 + \beta t_1^2 + t_1^3 - (at_2 + \beta t_2^2 + t_2^3)]. \quad (19)$$

Durch Gl. (18) ist der gesuchte Temperaturverlauf gefunden. Er entspricht genau dem Temperaturverlauf, wie er sich unter den gleichen Verhältnissen für einen Rekuperator mit der Wärmedurchgangszahl  $2k_o$  errechnen würde. In Bild 8 ist der Temperaturverlauf nach Gl. (18) für ein Beispiel durch die gestrichelte Linie zwischen  $t_2$  und  $t_1$  dargestellt.

Die in Wirklichkeit erforderliche wärmeübertragende Fläche  $F$  ist grösser als  $F_o$  und zwar im Verhältnis der Mittelwerte von  $k_o$  und der

wahren Wärmeübergangszahl  $k$ . Wie dieses Verhältnis  $(k_o)_M/k_M$  ermittelt werden kann, wird im folgenden Abschnitt gezeigt. Hat man mit Hilfe dieses Verhältnisses  $F$  bestimmt, dann muss man den nach Gl. (18) erhaltenen Temperaturverlauf in waagerechter Richtung strecken, wie es in Bild 8 angedeutet ist.

Auf diese Weise ist der Temperaturverlauf in der Längsrichtung des Regenerators in erster Näherung festgelegt. Es ist ein mittlerer Temperaturverlauf, um den die Temperaturen im Beharrungszustand periodisch schwanken. Man hat ihn daher als den Temperaturverlauf in der Mitte einer Warm- oder Kaltperiode zu betrachten. Von diesem Verlauf ausgehend kann man daher das eingangs beschriebene Stufenverfahren anwenden, indem man zunächst die zweite Hälfte einer Warm- oder Kaltperiode durchrechnet. Den Beharrungszustand wird man dann nach Durchrechnung von verhältnismässig wenigen weiteren Perioden erhalten.

#### ERMITTLUNG DER MITTLEREN

#### WAHREN WÄRMEDURCHGANGSZAHL $k_M$

Schon die letzten Betrachtungen über die Abschätzung des Temperaturverlaufs liessen es wünschenswert erscheinen, das Verhältnis des Mittelwertes  $k_M$  der wahren Wärmedurchgangszahl zum Mittelwert  $(k_o)_M$  der Wärmedurchgangszahl nach der nullten Eigenfunktion zu bestimmen. Die Kenntnis des Wertes von  $k_M$  ist aber auch deshalb von Interesse, weil man hiermit den Wärmeaustausch im gesamten Regenerator berechnen kann, ohne zuvor den Temperaturverlauf in allen seinen Phasen verfolgen zu müssen. Denn bei temperaturabhängiger Wärmedurchgangszahl soll anstelle von Gl. (11) gelten:

$$Q_{Per} = k_M F(T + T') \Delta\vartheta_M. \quad (20)$$

Nach einem vom Verfasser früher für einen konstanten Wert von  $k$  entwickelten Verfahren† bestimmt man zunächst die Wärmeübergangszahl  $k_o$  nach der nullten Eigenfunktion. Sinnemäss ermittelt man im vorliegenden Falle den

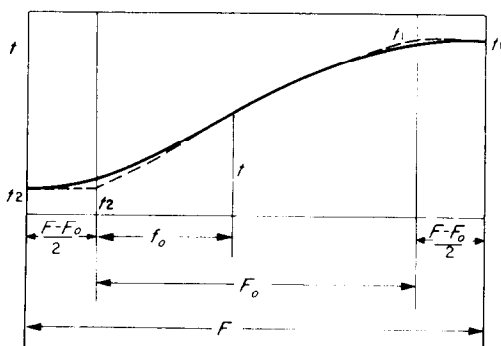


BILD 8. Angenäherter Verlauf der Temperatur der Speichermasse in der Mitte einer Warm- oder Kaltperiode.

† Siehe S. 283 bis 285 des oben zitierten Buches.

Mittelwert  $(k_o)_M$ , der entsprechend Gl. (20) der Beziehung genügt

$$Q_{Per} = (k_o)_M F_o(T + T') \Delta \vartheta_M. \quad (21)$$

Hieraus folgt

$$(k_o)_M = \frac{Q_{Per}}{F_o(T + T') \Delta \vartheta_M}. \quad (22)$$

Hat man also  $F_o$  nach Gl. (19) berechnet, dann erhält man aus Gl. (22) sofort  $(k_o)_M$ .

Um die wahre Wärmeübergangszahl  $k$  aus  $k_o$  zu ermitteln, berechnet man entsprechend dem früher angegebenen Verfahren zunächst die reduzierte Regeneratorlänge  $\Lambda$  und die reduzierte Periodendauer  $\Pi$  nach den Gleichungen†

$$\Lambda = 2 \frac{k_o(T + T') F}{C_{Per}} \quad \text{und} \quad \Pi = 2 \frac{k_o(T + T') F}{C_s}. \quad (23)$$

Mit den Werten von  $\Lambda$  und  $\Pi$  greift man das gesuchte Verhältnis  $k/k_o$  aus Bild 9 ab. Multiplikation von  $k_o$  mit  $k/k_o$  liefert schliesslich die wahre Wärmedurchgangszahl  $k$ .

Hängen aber  $k_o$  sowie  $C_{Per}$  und  $C_s$  von der Temperatur ab, dann liegt es nahe, in den Gl. (23)  $k_o$  durch den Mittelwert  $(k_o)_M$  und auch  $C_{Per}$  und  $C_s$  durch geeignete Mittelwerte

† Gl. (419) im angegebenen Buch.

zu ersetzen. Mit den so aus den Gln. (23) erhaltenen Werten von  $\Lambda$  und  $\Pi$  liest man nun aus Bild 9 einen Wert ab, den man mit guter Näherung gleich  $k_M/(k_o)_M$  setzen kann. Schliesslich liefert auch in diesem Falle die Multiplikation dieses Wertes mit  $(k_o)_M$  die gesuchte mittlere wahre Wärmedurchgangszahl  $k_M$ .

Bei der praktischen Anwendung ist indessen vielfach  $F$  nicht bekannt, sondern gesucht. In diesem Falle empfiehlt es sich zunächst  $F_o$  statt  $F$  in die Gln. (23) einzusetzen und damit einen Näherungswert von  $k_M/(k_o)_M$  zu bestimmen. Damit erhält man zugleich einen Näherungswert von  $F$ , weil nach Gl. (20) und (21)  $F = [(k_o)_M/k_M] F_o$  ist. Hiermit liefern die Gln. (23) verbesserte Werte von  $\Lambda$  und  $\Pi$ , die schliesslich nach Bild 9 einen genaueren Wert von  $k_M/(k_o)_M$  und damit auch von  $k_M$  festlegen.

Das beschriebene Verfahren zur Ermittlung der mittleren wahren Wärmedurchgangszahl  $k_M$  ist zwar nicht exakt. Es dürfte aber eine so gute Näherung darstellen, dass es in den meisten praktischen Fällen zur Berechnung der Wärmeübertragung in Regeneratoren, insbesondere zur Ermittlung der benötigten wärmeübertragenden Fläche ausreicht. Sollte dies in Sonderfällen nicht zutreffen, dann bietet das eingangs geschilderte Stufenverfahren die Möglichkeit einer Berechnung von relativ sehr hoher Genauigkeit.

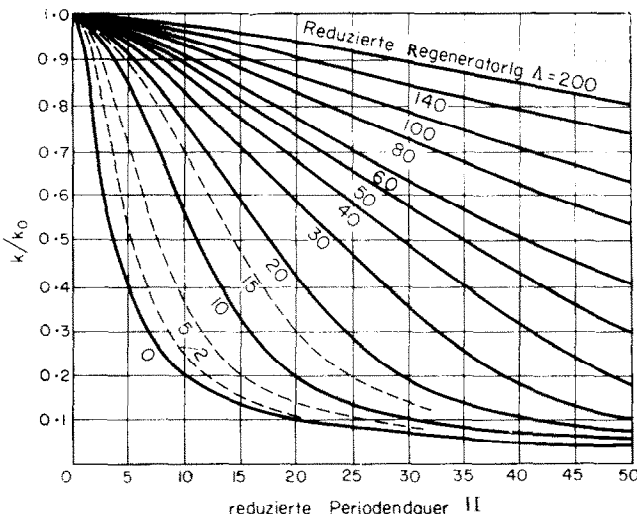


BILD 9. Verhältnis der wahren Wärmedurchgangszahl  $k$  zur Wärmedurchgangszahl  $k_o$  nach der Grundschwingung.

**Abstract**—The desire for higher temperatures in heat exchangers requires the consideration not only of the influence of radiation but also of temperature dependence of fluid properties. These properties enter the equations of heat transfer and the heat balance. A formerly published step-wise method for calculating regenerators, originally applicable only to constant properties, is so extended that the mentioned dependences from temperature can be included in the calculation. An example renders the results of such a calculation.

**Résumé**—Dans les échangeurs thermiques pour très hautes températures il faut considérer non seulement l'influence du rayonnement mais également de la variation des propriétés du fluide avec la température. Ces propriétés font intervenir les équations de transport de chaleur et de bilan thermique. Une méthode d'échelon pour le calcul des régénérateurs, applicable à l'origine uniquement lorsque les propriétés sont constantes, a été étendue pour permettre de tenir compte des variations avec la température. Un exemple montre les résultats d'un tel calcul.

**Аннотация**—Переход к более высоким температурам в теплообменниках делает необходимым рассмотрение не только влияния излучения, но также влияния зависимости температуры от свойств жидкости. Эти свойства учитываются уравнением переноса тепла и уравнением теплового баланса. Ранее опубликованный метод последовательных вычислений для расчёта регенераторов, применённый первоначально только при постоянных теплофизических свойствах газа, использован таким образом, что упомянутые зависимости от температуры можно учесть в расчёте. Результаты такого расчёта иллюстрированы примером.